Egzamin z RRZ, 22 czerwiec 2021: godz. 10:00 – 14:00

Każde zadanie oddajemy oddzielnie z moodle. Każde zadanie oceniane jest na 10 pt. Odradzamy wkładanie wszystkich zadań na raz w ostatnim momencie.

Zad. 1. Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem klasy C^2 równania $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, przy czym p i q są ciągłe oraz $q(t) < 0$. Wykazać, że $x(t)$ nie może posiadać dodatnich maksimów lokalnych.

Zad. 2. Zbadaj stabilność stanów stacjonarnych układu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x+1) \\ \dot{y} &= z(y+1) \\ \dot{z} &= x(z+1). \end{aligned}$$

Zad. 3. Udowodnij, że układ

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} &= x + x^2y + 2y^3 \end{cases}$$

nie ma nietrywialnych rozwiązań okresowych.

Zad. 4. Niech $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Znajdź obraz koła jednostkowego na płaszczyźnie pod działaniem macierzy e^A.

Zad. 5. Rozważmy równania:

$$(1) \qquad \dot{x} = \operatorname{sgn} x, \qquad (2) \qquad \dot{x} = -\operatorname{sgn} x.$$

Niech $x|_{t=0} = x_0 \in (-1, 1)$. Mówimy, że $x(t) : [0, T) \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem całkowym równania odpowiednio (1) lub (2) wtedy gdy spełnia tożsamość całkową

$$(1) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t \operatorname{sgn} x, \qquad (2) \quad x(t) = x_0 - \int_0^t \operatorname{sgn} x.$$

Wykaż istnienie rozwiązania całkowego na odcinku czasowym $[0, T)$ dla dowolnego $T > 0$.

Czy rozwiązanie dla $x_0 = 0$ jest jednoznaczne?

Czy rozwiązanie $x \equiv 0$ jest stabilne?

Przypomnijmy: $\operatorname{sgn} w = 0$ dla $w = 0$; $= 1$ dla $w > 0$ oraz $= -1$ dla $w < 0$.